CH 8 IDENTITE DE BEZOUT

EX 8 :

1. $\left.\begin{matrix} n|4a+5b \\ n|5a+2b \end{matrix}\right\} \Rightarrow n|5.(5a+2b)-2(4a+5b) \Rightarrow n|17a$

$\left.\begin{matrix} n|4a+5b \\ n|5a+2b \end{matrix}\right\} \Rightarrow n|5.(4a+5b)-4.(5a+2b) \Rightarrow n|17b$

2. Soit h= (4a+5b)∧(5a+2b).

On a d=a∧b $\Rightarrow \left.\begin{matrix} d|a \\ d|b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d|4a+5b \\ d|5a+2b \end{matrix}\right\} \Rightarrow d|h \Rightarrow h = k.d$

h=(4a+5b)∧(5a+2b) $\Rightarrow \left.\begin{matrix} h|4a+5b \\ h|5a+2b \end{matrix}\right\} \overset{d'après\,1}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} h|17a \\ h|17b \end{matrix}\right\} \Rightarrow h|17a \wedge 17b \Rightarrow h|17(a \wedge b) \Rightarrow k.d|17.d \Rightarrow k|17$

$\Rightarrow$ k=1 ou k=17

$\Rightarrow$ h=d ou h=17d

EX 9 :

1. Si d divise a et b alors d divise toute combinaison linéaire de a et b et en particulier d divise a+bn et a+b(n-1)

2. Si d divise a+bn et a+b(n-1) Alors d divise a+bn-(a+b(n-1))= b donc d divise b et par suite d divise bn

d divise a+bn et d divise bn Alors d divise a

3. Soient d = a^b et d' = (

* d =a^b Alors d divise a et b Alors (d'après 1/) d divise a+bn et a+b(n-1)
  Donc d divise d'

* d' =(a+bn)^(a+b(n-1)) Alors d' divise a+bn et a+b(n-1)
  Alors (d'après 2.) d' divise a et d' divise b donc d' divise d

On a d divise d' et d' divise d Donc d'=d

Conclusion : $\boxed{(a+bn) \wedge (a+b)(n-1)) = a \wedge b}$